

РОЗДІЛ 3

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ ПАРАМЕТРІВ ДИНАМІЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ВАГОНА З РЕЙКОВОЮ КОЛІЄЮ У МІСЦІ ІЗОЛЬОВАНОЇ СТИКОВОЇ НЕРІВНОСТІ З УРАХУВАННЯМ ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ ФАКТОРІВ

Найважливішою складовою безперебійного і безпечного руху рейкового транспорту є технічний стан колій [1-16]. При цьому деформаційні характеристики баластового шару під рейковими опорами (параметри пружного і залишкового осідання під першою шпалою) регламентують, в остаточному підсумку, технічний ресурс колій, а також тривалість їх експлуатації [1-16].

Практика показує, що найбільше осідання баластового шару відбувається в місцях стикових нерівностей під шпалами приймаючої рейки. Це пов'язано з тим, що в цих місцях рейка, як правило, випробує найбільші силові динамічні навантаження ударного типу [1-16].

Даний розділ роботи присвячений вивченню параметрів динамічної ударної взаємодії контактуючої пари "вагон – колесо – рейка" з урахуванням конструктивної швидкості V_x руху і завантаження m_2 вагона, а також геометричних параметрів стику (Δ , h). На їхній основі поставлена і розв'язана задача впливу механічних і конструктивних параметрів вагона на прогини віддаючої і приймаючої рейок. Також досліджені і проаналізовані залежності пружного осідання першої шпали приймаючої рейки для різних типів взаємодії і граничних умов його закріплення. Дослідження побудовані на базі розрахункової схеми, що не суперечить роботам [1-3], описуючим нестационарні процеси ударної взаємодії колісної пари, що включає підресорену масу вагона, із приймаючою рейкою, установленим на нижній будові колії через опори, що моделюють пружні характеристики баластового шару.

3.1 Дослідження впливу конструктивних і механічних параметрів вагона на фазі балістичного руху дискретної системи «вагон – колесо» на прогини рейкової колії для стику типу «зазор –ступінь вниз»

Найбільш небезпечними з погляду накопичення деформації баластового шару є стикові нерівності рейкової колії типу "зазор – ступінь вниз". Даний тип нерівності на практиці зустрічається досить часто [77], співвідношення його параметрів (ширина стику Δ і його висота h) варіюється в широких межах, а особливості їхнього виникнення розглянуті в розділі 1.2 даної роботи, а також у роботах [5,6,11,62,76].

Механічна схема аналізованої системи "двовимірна дискретна система – нерозрізна багатопрогонова балка на пружних опорах" приведена на рис. 3.1. При дослідженні процесів динамічної взаємодії прийняті наступні допущення, що не суперечать результатам робіт [1-3]: після фази балістичного руху коливання колісної пари і головки рейки відбуваються в безвідривному режимі (з огляду на те, що $m_2 \gg m_1$, допущення є прийнятним); прогини рейки реалізуються без порушення суцільності баластового шару (з огляду на те, що розглядаються й аналізуються граничні деформаційні характеристики баластового шару під першою шпалою на фазі приземлення колеса і прогинів рейки тільки "вниз"); демпфуючі властивості баластового шару не враховуються (оскільки прогин рейки розглядається лише на першій за часом фазі його зростання, допущення є прийнятним).

Тут приведена також модель двомасової дискретної механічної системи "колісна пара – вагон" на фазі балістичного руху на стику рейки типу "зазор – ступінь вниз". Траєкторія руху колеса показана пунктирною лінією. У момент зіткнення колеса з рейкою на відстані l^* від краю рейки колесо має вертикальну швидкість V_{01} . Тут уведені наступні позначення: m_1 , m_2 – приведені маси колеса і вагона відповідно; c – жорсткість підвіски, c_1 , c_2, \dots, c_n – жорсткість баластового шару, приймаємо $c_1 = c_2 = \dots = c_n$, l_1 – відстань від краю рейки до першої шпали, l – відстань між шпалами. Якщо на

схемі, приведений на рис. 3.1, висота $h = 0$, то стик відноситься до типу "зазор" (див. класифікацію стиків у розділі 2 роботи).

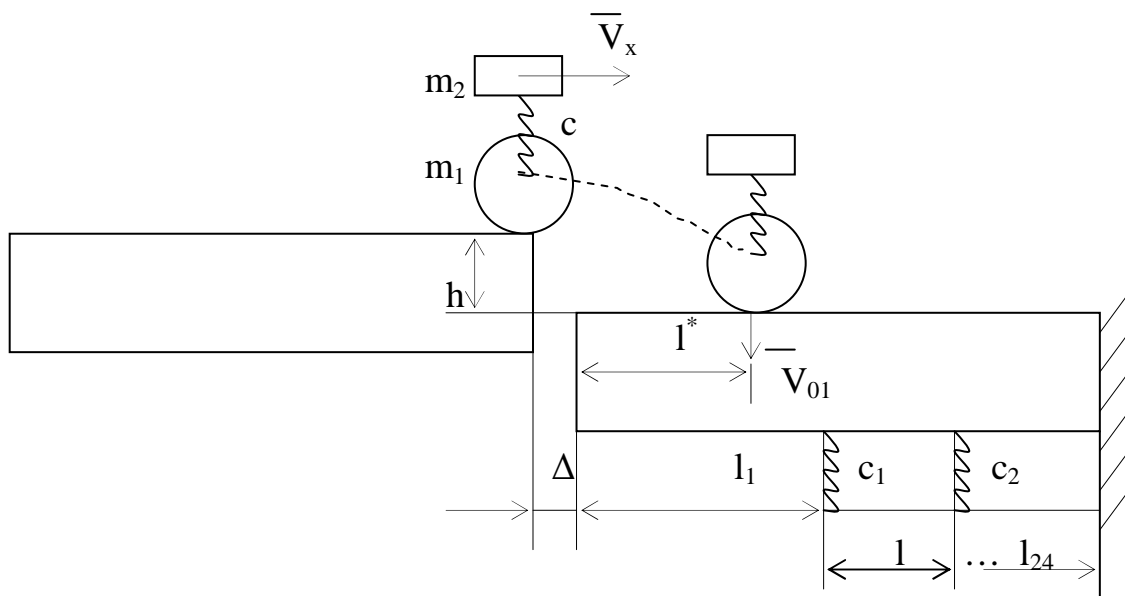


Рис. 3.1. Модель системи " підресорена маса вагона – колесо – рейка"

У даній роботі розглядаються наступні варіанти закріплення лівого і правого кінців рейки (див. табл. 3.1)

Таблиця 3.1

Варіанти закріплення лівого і правого кінців рейки

Вид закріплення	Лівий кінець	Правий кінець
Схема 1	Затиснений, накладка абсолютно жорстка	Затиснений, накладка абсолютно жорстка
Схема 2	Накладки допускають кутову підатливість приймаючої рейки	Затиснений, накладка абсолютно жорстка
Схема 3	Вільний: накладка не функціонує	Затиснений, накладка абсолютно жорстка
Схема 4	Вільний: накладка не функціонує	Вільний: накладка не функціонує
Схема 5	Затиснений, накладка абсолютно жорстка	Вільний: накладка не функціонує

При цьому граничні умови для приймаючої рейки приведені в таблиці 3.2.

Граничні умови для приймаючої рейки

Вид за-кріплення	Лівий кінець	Правий кінець
Схема 1	$W(t,0)=0; \frac{\partial W(t,0)}{\partial x} = 0$	$W(t,L)=0; \frac{\partial W(t,L)}{\partial x} = 0$
Схема 2	$W(t,0)=0; \frac{\partial^2 W(t,0)}{\partial x^2} = 0$	$W(t,L)=0; \frac{\partial W(t,L)}{\partial x} = 0$
Схема 3	$\frac{\partial^2 W(t,0)}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^3 W(t,0)}{\partial x^3} = 0$	$W(t,L)=0; \frac{\partial W(t,L)}{\partial x} = 0$
Схема 4	$\frac{\partial^2 W(t,0)}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^3 W(t,0)}{\partial x^3} = 0$	$\frac{\partial^2 W(t,L)}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^3 W(t,L)}{\partial x^3} = 0$
Схема 5	$W(t,0)=0; \frac{\partial W(t,0)}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial W(t,L)}{\partial x} = 0; \frac{\partial^3 W(t,L)}{\partial x^3} = 0$

Далі на рис. 3.2 і 3.3 приведені для приклада моделі аналізованих механічних систем схема 4 і схема 3 (з табл. 3.1), де q – розподілене навантаження - погонна вага рейки: $q = \gamma \cdot F$; γ – питома вага, F – площа поперечного перерізу.

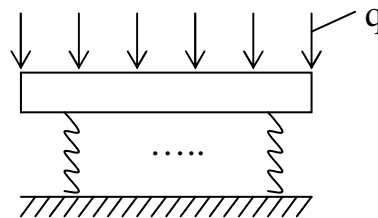


Рис. 3.2. Модель аналізованої механічної системи на проміжних пружних опорах при нефункціонуючих рейкових накладках (модель 1)

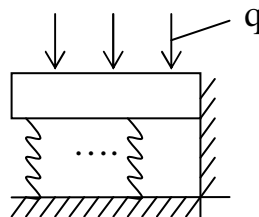


Рис. 3.3. Модель механічної системи з защемленням на кінці при жорстких накладках на правому кінці рейки (модель 2)

Структурна схема механічної дискретно-континуальної системи для дослідження процесів післяударних прогинів системи "вагон – колесо – рейка", з урахуванням різного типу граничних умов, приведена на рис. 3.4. Тут y_2 – переміщення приведеної маси вагона m_2 ; c – жорсткість ресори; c_1 – жорсткість опори, що моделює пружні властивості баластового шару. Схему дискретної частини системи для підгумового колеса приведено на рис. 2.1,б.

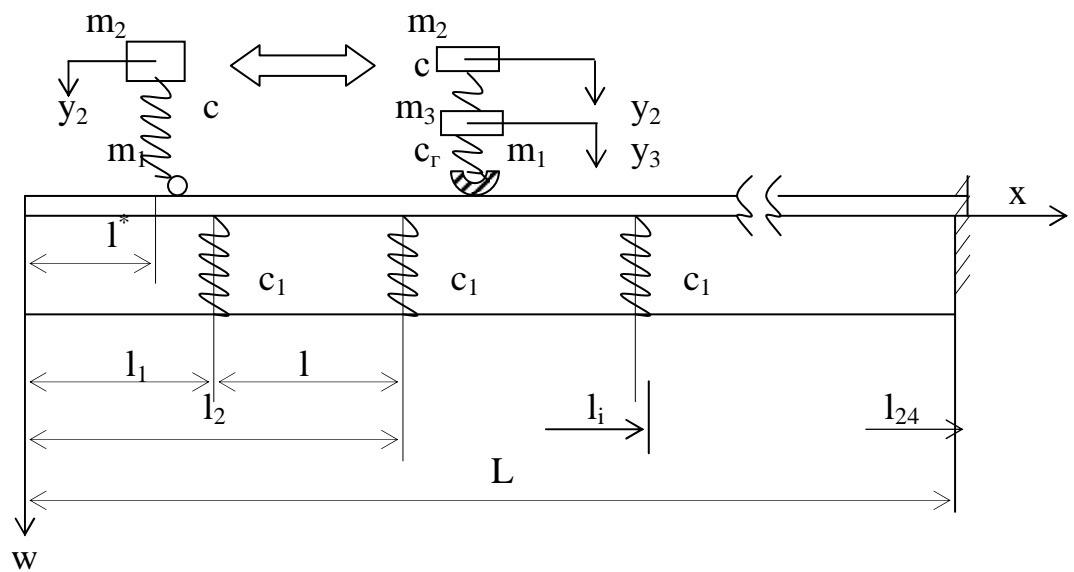


Рис. 3.4. Система «вагон – рейка на проміжних пружних опорах»

Запишемо, з огляду на [62,83,84], диференціальні рівняння руху даної механічної системи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^{IV} w(t, x)}{\partial x^4} + \frac{\rho F}{EJ} \cdot \frac{\partial^{II} w(t, x)}{\partial t^2} = \frac{c(y_2 - w(t, l^*))\delta(x - l^*)}{EJ} - \\ - \sum_{i=1}^j \frac{c_1 w(t, l_i)\delta(x - l_i)}{EJ} - \frac{m_1}{EJ} \frac{\partial^{II} w(t, l^*)\delta(x - l^*)}{\partial t^2}, \quad j = 1 \div 23; \\ m_2 \ddot{y}_2 + c(y_2 - w(t, l^*)) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

де w – прогин рейки;

l^* – відстань від краю рейки до колеса в момент зіткнення;

l_i, l – відстань до i -тої шпали і між шпалами;

ρ, E – щільність і модуль пружності матеріалу рейки;

J – момент інерції перерізу рейки відносно нейтральної осі;

$\delta(x-x_0)$ – імпульсна функція [85, 86].

Для підгумового колеса рівняння (3.1) системи отримує наступні зміни:

– в першому рівнянні замість " y_2 " слід прийняти " y_3 ";

– друге рівняння, враховуючи (2.7), запишемо у вигляді сукупності

двох:

$$m_3 \ddot{y}_3 + (c + c_r)y_3 = c_r w(t, l^*) + cy_2;$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + cy_2 = cy_3.$$

Розв'язання системи (3.1) знайдемо з застосуванням методу Фур'є поділу перемінних [86,87]:

$$\begin{cases} w(t, x) = z(x)\sin(\omega t + \alpha); \\ y_2(t) = \lambda_2 \sin(\omega t + \alpha), \end{cases} \quad (3.2)$$

де ω – власна частота системи;

$z(x)$ – власна форма прогину рейки;

λ_2 – власна форма для координати y_2 .

Позначивши $\lambda_1 = z(l^*)$ і підставивши (3.2) у рівняння руху (3.1) одержимо:

$$\left\{ \begin{aligned} & z^4(x) - \kappa_1^4 z(x) - \kappa_2^4 z(l^*) \delta(x - l^*) - \frac{c}{EJ} (\lambda_2 - \lambda_1) \delta(x - l^*) + \\ & + \frac{c_1}{EJ} \sum_{i=1}^j Z(l_i) \delta(x - l_i) = 0, \quad j = 1 \div 23; \\ & - m_2 \lambda_2 \omega^2 + c(\lambda_2 - \lambda_1) = 0, \end{aligned} \right. \quad (3.3)$$

$$\text{де } \kappa_1^4 = \frac{\rho F}{EI} \omega^2; \quad \kappa_2^4 = \frac{m_1}{EJ} \omega^2; \quad \lambda = z(l^*).$$

Для розв'язання системи диференціальних рівнянь (3.3) застосуємо методи теорії операційного числення Лапласа-Карсона [88,89].

Тоді перше рівняння (3.3) прийме вид:

$$\begin{aligned} & p^4 [\eta(p) - z(0) - \frac{z'(0)}{p} - \frac{z''(0)}{p^2} - \frac{z'''(0)}{p^3}] - \kappa_1^4 \eta(p) - \kappa_2^4 z(l^*) p e^{-pl^*} - \\ & - \frac{c}{EJ} (\lambda_2 - \lambda_1) p e^{-pl^*} + \frac{c_1}{EJ} \sum_{i=1}^j z(l_i) p e^{-pl_i} = 0, \quad j = 1 \div 23. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Зображення $\eta(p)$ знайдемо з вираження

$$\begin{aligned} \eta(p) = & \frac{p^4}{p^4 - \kappa_1^4} z(0) + \frac{p^3}{p^4 - \kappa_1^4} \frac{\kappa_1}{\kappa_1} z'(0) + \frac{p^2}{p^4 - \kappa_1^4} \frac{\kappa_1^2}{\kappa_1^2} z''(0) + \frac{p^2}{p^4 - \kappa_1^4} \frac{\kappa_1^3}{\kappa_1^3} z'''(0) + \\ & + \kappa_2^4 z(l^*) \frac{p e^{-pl^*}}{p^4 - \kappa_1^4} + \frac{c}{EJ} (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{p e^{-pl^*}}{p^4 - \kappa_1^4} - \frac{c_1}{EJ} \sum_{i=1}^j z(l_i) \frac{p e^{-pl_i}}{p^4 - \kappa_1^4}, \quad j = 1 \div 23. \end{aligned} \quad (3.5)$$

За допомогою теореми запізнювання [85,88] перейдемо до оригіналу.

У результаті рівняння власних форм коливань рейки буде мати вид:

$$\begin{aligned}
z(x) = & \rho(\kappa_1 x) z(0) + \frac{\varphi(\kappa_1 x)}{\kappa_1} z'(0) + \frac{\psi(\kappa_1 x)}{\kappa_1^2} z''(0) + \frac{\gamma(\kappa_1 x)}{\kappa_1^3} z'''(0) + \frac{\kappa_2^4 z(l^*)}{\kappa_1^3} x \\
& x \gamma[\kappa_1 (x - l^*)] \Big|_{x \geq l^*} + \frac{c}{EJ\kappa_1^3} (\lambda_2 - \lambda_1) \gamma[\kappa_1 (x - l^*)] \Big|_{x \geq l^*} - \frac{c_1}{EJ\kappa_1^3} \sum_{i=1}^j z(l_i) \gamma[\kappa_1 (x - l_i)] \Big|_{x \geq l_i}, \\
& j = 1 \div 23,
\end{aligned}
\tag{3.6}$$

де $\rho, \varphi, \psi, \gamma$ – функції Крілова:

$$\begin{aligned}
\rho(x) &= 0,5[\operatorname{ch}(px) + \cos(px)], \quad \varphi(x) = 0,5[\operatorname{sh}(px) + \sin(px)], \\
\psi(x) &= 0,5[\operatorname{ch}(px) - \cos(px)], \quad \gamma(x) = 0,5[\operatorname{sh}(px) - \sin(px)],
\end{aligned}$$

Рівняння (3.6) через особливості трьох останніх доданків розбивається на 25 рівнянь. На кожній з ділянок, показаних на рис. 3.5, рівняння для прогинів рейки буде мати наступний вид:

на ділянці $0 \leq x \leq l^*$

$$z_1(x) = \rho(\kappa_1 x) z(0) + \frac{\varphi(\kappa_1 x)}{\kappa_1} z'(0) + \frac{\psi(\kappa_1 x)}{\kappa_1^2} z''(0) + \frac{\gamma(\kappa_1 x)}{\kappa_1^3} z'''(0);$$

на ділянці $l^* \leq x \leq l_1$

$$\begin{aligned}
z_2(x) = & \rho(\kappa_1 x) z(0) + \frac{\varphi(\kappa_1 x)}{\kappa_1} z'(0) + \frac{\psi(\kappa_1 x)}{\kappa_1^2} z''(0) + \frac{\gamma(\kappa_1 x)}{\kappa_1^3} z'''(0) + \left[\frac{\kappa_2^4 z(l^*)}{\kappa_1^3} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{EJ\kappa_1^3} (\lambda_2 - \lambda_1) \right] \gamma[\kappa_1 (x - l^*)];
\end{aligned}$$

при $l_1 \leq x \leq L$ для i -ї ділянки ($l_i \leq x \leq l_{i+1}$)

$$z_i(x) = \rho(\kappa_1 x) \cdot z(0) + \frac{\varphi(\kappa_1 x)}{\kappa_1} z'(0) + \frac{\psi(\kappa_1 x)}{\kappa_1^2} z''(0) + \frac{\gamma(\kappa_1 x)}{\kappa_1^3} z'''(0) + \left[\frac{\kappa_2^4 z(l^*)}{\kappa_1^3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{EJ\kappa_1^3} (\lambda_2 - \lambda_1) \right] \mathcal{N}[\kappa_1(x - l^*)] - \frac{l_1}{EJ\kappa_1^3} \sum_{i=1}^j z(l_i) \mathcal{N}[\kappa_1(x - l_i)], \quad j = 2 \div 23$$

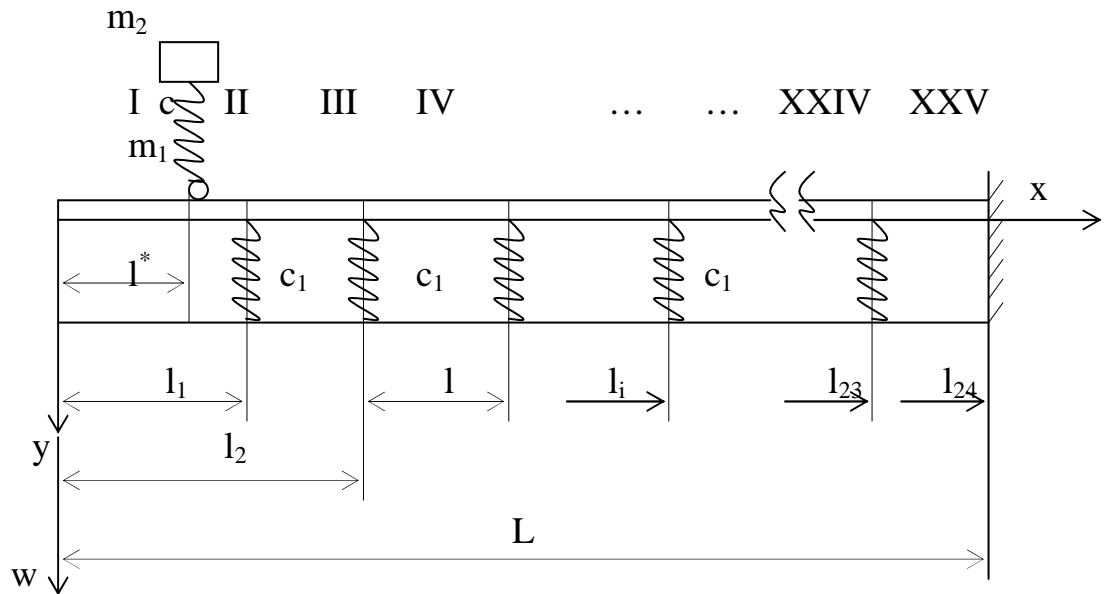


Рис. 3.5. Схема розбивки ділянки

Отримана система 25 рівнянь з урахуванням другого рівняння системи (3.3) має 30 невідомих:

$z(0)$ – значення функції $z(x)$ на початку координат;

$z'(0)$ – похідна функції $z(x)$ на початку координат;

$z''(0)$ – друга похідна при $x = 0$;

$z'''(0)$ – третя похідна при $x = 0$;

λ_1 – амплітуда власної форми першої узагальненої координати;

λ_2 – амплітуда власної форми другої узагальненої координати;

$z(l^*)$ – значення функції в місці контакту рейки з колесом;

$z(l_i)$ ($i = 1 \div 23$) – величини прогинів рейки під шпалами;

Для визначення цих невідомих застосуємо метод, викладений у роботах [90,91]. Граничні умови для лівого (при $x = 0$) і правого кінців (при $x = L$) рейки візьмемо з таблиці 3.2.

У цьому випадку для схеми 3, що найбільше часто зустрічається на практиці, одержимо наступну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1''(0) = 0; \\ z_1'''(0) = 0; \\ z_{25}(L) = 0; \\ z_{25}'(L) = 0; \\ z_1(l^*) = \rho(\kappa_1 l^*)z(0) + \frac{\varphi(\kappa_1 l^*)}{\kappa_1} z'(0) + \frac{\psi(\kappa_1 l^*)}{\kappa_1^2} z''(0) + \frac{\gamma(\kappa_1 l^*)}{\kappa_1^3} z'''(0); \\ z_2(l_1) = \rho(\kappa_1 l_1)z(0) + \frac{\varphi(\kappa_1 l_1)}{\kappa_1} z'(0) + \frac{\psi(\kappa_1 l_1)}{\kappa_1^2} z''(0) + \frac{\gamma(\kappa_1 l_1)}{\kappa_1^3} z'''(0) + \left[\frac{\kappa_2^4 z(l^*)}{\kappa_1^3} + \right. \\ \left. + \frac{c}{EJ\kappa_1^3} (\lambda_2 - \lambda_1) \right] \gamma[\kappa_1 (l_1 - l^*)]; \\ z_j(l_j) = \rho(\kappa_1 l_j)z(0) + \frac{\varphi(\kappa_1 l_j)}{\kappa_1} z'(0) + \frac{\psi(\kappa_1 l_j)}{\kappa_1^2} z''(0) + \frac{\gamma(\kappa_1 l_j)}{\kappa_1^3} z'''(0) + \\ + \left[\frac{\kappa_2^4 z(l^*)}{\kappa_1^3} + \frac{c}{EJ\kappa_1^3} (\lambda_2 - \lambda_1) \right] \gamma[\kappa_1 (l_j - l^*)] - \frac{c_1}{EJ\kappa_1^3} \sum_{i=1}^j z(l_i) \gamma[\kappa_1 (l_{i+1} - l_i)] \quad (j = 2 \div 23); \\ - m_2 \lambda_2 \omega^2 + c(\lambda_2 - \lambda_1) = 0; \\ \lambda_1 = z_1(l^*), \end{array} \right.$$

або в матричному виді:

$$[A] \cdot [x]' = 0, \quad (3.7)$$

де $x = [z(0), z'(0), z''(0), z'''(0), z(l^*), \lambda_1, \lambda_2, z(l_1), \dots, z(l_{23})]'$, а ненульові члени матриці $[A]$ приведені в додатку 1.

Вектор невідомих в системі рівнянь (3.7):

$$\{X\} = \{z(0), z'(0), z''(0), z'''(0), z(l^*), \lambda_1, \lambda_2, z(l_1), z(l_2), z(l_3), z(l_4), z(l_5), z(l_6), z(l_7), \\ z(l_8), z(l_9), z(l_{10}), z(l_{11}), z(l_{12}), z(l_{13}), z(l_{14}), z(l_{15}), z(l_{16}), z(l_{17}), z(l_{18}), z(l_{19}), z(l_{20}), \\ z(l_{21}), z(l_{22}), z(l_{23}), z(l_{24})\}$$

Необхідною умовою існування ненульових рішень даної системи є рівність нулю визначника матриці $[A]$ [85]:

$$\det|A| = 0. \quad (3.8)$$

Власні частоти ω рейки знайдемо з умови (3.8), а саме з умови [29,92] мінімуму функції

$$f(\omega) = [\det|A|]^2. \quad (3.9)$$

Для кожної власної частоти установимо вектор невідомих коефіцієнтів (3.7). По ним визначимо власні форми коливань розглянутої механічної системи, що відповідають цим частотам.

Вектор невідомих для перших п'яти власних частот буде:

$$\begin{aligned} x^1 &= \{z^1(0), z^{1'}(0), z^{1''}(0), z^{1'''}(0), z^1(l^*), \lambda_1^1, \lambda_2^1, z^1(l_i), i = 1 \div 23\}; \\ x^2 &= \{z^2(0), z^{2'}(0), z^{2''}(0), z^{2'''}(0), z^2(l^*), \lambda_1^2, \lambda_2^2, z^2(l_i), i = 1 \div 23\}; \\ x^3 &= \{z^3(0), z^{3'}(0), z^{3''}(0), z^{3'''}(0), z^3(l^*), \lambda_1^3, \lambda_2^3, z^3(l_i), i = 1 \div 23\}; \\ x^4 &= \{z^4(0), z^{4'}(0), z^{4''}(0), z^{4'''}(0), z^4(l^*), \lambda_1^4, \lambda_2^4, z^4(l_i), i = 1 \div 23\}; \\ x^5 &= \{z^5(0), z^{5'}(0), z^{5''}(0), z^{5'''}(0), z^5(l^*), \lambda_1^5, \lambda_2^5, z^5(l_i), i = 1 \div 23\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

З урахуванням (3.10), обмежившись першими п'яти формами коливань, одержимо:

$$\begin{aligned} z^j(x) &= \rho(\kappa_1^j x) z^j(0) + \frac{\varphi(\kappa_1^j x)}{\kappa_1^j} z^{j'}(0) + \frac{\psi(\kappa_1^j x)}{\kappa_1^{j^2}} z^{j''}(0) + \frac{\gamma(\kappa_1^j x)}{\kappa_1^{j^3}} z^{j'''}(0) + \left[\frac{\kappa_2^{j^4} z^j(l^*)}{\kappa_1^{j^3}} + \right. \\ &+ \left. \frac{c}{EJ\kappa_1^{j^3}} (\lambda_2^j - \lambda_1^j) \right] \gamma[\kappa_1^j(x - l^*)] \Big|_{x \geq l^*} - \frac{c_1}{EJ\kappa_1^{j^3}} \sum_{i=1}^j z^j(l_i) \gamma[\kappa_1^j(x - l_i)] \Big|_{x \geq l^*}, \quad (j = 1 \div 5), \end{aligned}$$

де κ_1^j, κ_2^j – константи, що відповідають j -тій формі коливань (див. (3.3)).

Розв'язання задачі про вільні коливання (у нашому випадку без змущуючої сили) зводиться до суперпозиції власних форм.

Прогин рейки, що відповідає кожній з власних частот, дорівнює:

$$W^j(t, x) = A_j z^j(x) \sin(\omega_j t + \alpha_j). \quad (3.11)$$

Константи A_j, α_j знаходяться з початкових умов.

Для перших п'яти форм коливань одержимо:

$$W(t, x) = \sum_{j=1}^5 A_j W^j(t, x). \quad (3.12)$$

Представимо (3.12) у виді:

$$W(t, x) = \sum_{j=1}^5 z^j(x) (D_j \sin \omega_j t + M_j \cos \omega_j t); \quad (3.13)$$

$$y_1(t, l^*) = W(t, x = l^*) =$$

$$\sum_{j=1}^5 z^j(l^*) (D_j \sin \omega_j t + M_j \cos \omega_j t) = \sum_{j=1}^5 (\lambda_1^j D_j \sin \omega_j t + \lambda_1^j M_j \cos \omega_j t)$$

Тоді рух підресореної маси вагона буде:

$$y_2(t) = \sum_{j=1}^5 (\lambda_2^j D_j \sin \omega_j t + \lambda_2^j M_j \cos \omega_j t). \quad (3.14)$$

Невідомі константи в (3.13) визначимо з початкових умов.

Рівняння (3.3) для j -тої частоти мають вид:

$$\begin{cases} z^{jIV}(x) - \kappa_1^{j4} z^j(x) - [\kappa_2^{j4} z^j(l^*) + \frac{c}{EJ} (\lambda_2^j - \lambda_1^j)] \delta(x - l^*) + \frac{c_1}{EJ} \sum_{i=1}^{23} z^j(l_i) \delta(x - l_i) = 0, & j=1 \div 5; \\ -m_2 \lambda_2^j \omega_j^2 + c(\lambda_2^j - \lambda_1^j) = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Розглянемо далі випадок жорсткого закладення правого кінця прий-
маючої рейки (схема 3, табл. 3.2). Початкові умови руху системи:

$$w(0, x) = 0;$$

$$\begin{aligned}
\dot{w}(0,x) &= 0|_{x \neq l^*}; \\
\dot{w}(0,l^*) &= V_1; \\
y_2(0) &= 0; \\
\dot{y}_2(0) &= V_{01}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Необхідною умовою розв'язання системи (3.15) є умова ортогональності власних форм коливань. Одержимо його [85,86].

Візьмемо перше рівняння системи (3.15) для j -тої частоти і помножимо його на s -ту форму коливань. Далі це ж рівняння системи (3.15) для s -тої частоти помножимо на j -ту форму коливань. Необхідною умовою ортогональності є нульове значення інтеграла по довжині рейки для отриманих добутків:

$$\begin{cases} \int_0^L z^{jIV}(x) z^s(x) dx - \kappa_1^4 \int_0^L z^j(x) z^s(x) dx - [\kappa_2^4 z^j(l^*) + \frac{c}{EJ}(\lambda_2^j - \lambda_1^j)] z^s(l^*) + \frac{c_1}{EJ} \sum_{i=1}^{23} z^s(l_i) z^j(l_j) = 0; \\ \int_0^L z^{sIV}(x) z^j(x) dx - \kappa_1^4 \int_0^L z^s(x) z^j(x) dx - [\kappa_2^4 z^s(l^*) + \frac{c}{EJ}(\lambda_2^s - \lambda_1^s)] z^j(l^*) + \frac{c_1}{EJ} \sum_{i=1}^{23} z^j(l_i) z^s(l_j) = 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Зробимо перетворення і введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}
\int_0^L z^{jIV} z^s dx &= z^{j'''} z^s \Big|_0^L - \int_0^L z^{j'''} z^{s'} dx = [z^{j''} z^s]_0^L - \int_0^L z^{j''} z^{s''} dx = \int_0^L z^{j''} z^{s''} dx, \\
\int_0^L z^{sIV} z^j dx &= \int_0^L z^{s''} z^{j''} dx,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1^j &= z^j(l^*); \\
\lambda_1^s &= z^s(l^*); \\
\kappa_1^4 &= \frac{\rho F}{EJ} \omega^2 \\
\kappa_2^4 &= \frac{m_1}{EJ} \omega^2.
\end{aligned}$$

Віднявши з другого рівняння системи (3.17) перше, одержимо умову ортогональності у виді:

$$\rho F(\omega_j^2 - \omega_s^2) \int_0^L z^s(x) z^j(x) dx + m_1(\omega_j^2 - \omega_s^2) \lambda_1^s \lambda_1^j + c(\lambda_2^j \lambda_1^s - \lambda_2^s \lambda_1^j) = 0. \quad (3.19)$$

Аналогічним чином зробимо з другим рівнянням системи (3.15):

$$m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s (\omega_j^2 - \omega_s^2) + c(\lambda_1^j \lambda_2^s - \lambda_1^s \lambda_2^j) = 0. \quad (3.20)$$

Склавши рівняння (3.19) і (3.20), одержимо умову ортогональності у виді

$$(\omega_j^2 - \omega_s^2) [\rho F \int_0^L z^s(x) z^j(x) dx + m_1 \lambda_1^s \lambda_1^j + m_2 \cdot \lambda_2^j \cdot \lambda_2^s] = 0$$

чи остаточно:

$$\rho F \int_0^L z^s(x) z^j(x) dx + m_1 \lambda_1^s \lambda_1^j + m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s = \delta^{js} \left(\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right), \quad (3.21)$$

де $\delta^{js} = 0|_{j \neq s}$, $\delta^{js} = 1|_{j=s}$.

Для визначення невідомих констант у рівняннях руху (3.15) запишемо початкові умови разом з умовами ортогональності, що приймуть наступний вид:

$$w(0, x) = \Phi_1(x) = \sum_{j=1}^5 z^j(x) M_j; \quad \left| x \rho F z^s(x) \right|_0^L; \quad y_1(0, l^*) = \Phi_1(l^*) = \sum_{j=1}^5 M_j \lambda_1^j; \quad \left| x m_1 \lambda_1^s \right|;$$

$$\begin{aligned}
\dot{w}(0,x) = \Phi_2(x) &= \sum_{j=1}^5 z^j(x) D_j \omega_j; \left| x \rho F z^s(x) \right|_0^L; \quad \dot{y}(0,l^*) = \Phi_2(l^*) = \\
&= \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j \lambda_1^j; \left| x m_1 \lambda_1^s; \right. \\
y_2(0) = y_{20} &= \sum_{j=1}^5 M_j \lambda_2^j; \left| x m_2 \lambda_2^s; \right. \\
\dot{y}_2(0) = \dot{y}_{20} &= \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j \lambda_2^j; \left| x m_2 \lambda_2^s, \right. \\
\text{де } \Phi_1(x) &= 0; y_{10} = 0; \\
\Phi_2(x) &= V_1 \delta(x - l^*); \quad \dot{y}_{10} = V_1; \\
y_{20} &= 0; \quad \dot{y}_{20} = V_{01}.
\end{aligned}$$

Остаточно одержимо:

$$\left\{ \begin{aligned}
\rho F \int_0^L \Phi_1(x) z^s(x) dx &= \sum_{j=1}^5 M_j \left[\rho F \int_0^L z^j(x) z^s(x) dx \right]; \\
\rho F \int_0^L \Phi_2(x) z^s(x) dx &= \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j \left[\rho F \int_0^L z^j(x) z^s(x) dx \right]; \\
m_1 \lambda_1^s y_{10} &= \sum_{j=1}^5 M_j m_1 \lambda_1^j \lambda_1^s; \\
m_1 \lambda_1^s \dot{y}_{10} &= \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j m_1 \lambda_1^j \lambda_1^s; \\
m_2 \lambda_2^s y_{20} &= \sum_{j=1}^5 M_j m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s; \\
m_2 \lambda_2^s \dot{y}_{20} &= \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s.
\end{aligned} \right. \quad (3.22)$$

Склавши в (3.22) рівняння перше, третє і п'яте, потім друге, четверте і шосте одержимо наступні формули для знаходження невідомих констант:

$$\begin{cases} \rho F \int_0^L \Phi_1(x) z^s(x) dx + m_1 \lambda_1^s y_{10} + m_2 \lambda_2^s y_{20} = \sum_{j=1}^5 M_j \left[\rho F \int_0^L z^j(x) z^s(x) dx + m_1 \lambda_1^j \lambda_1^s + \right. \\ \left. + m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s, \right. \\ \left. \rho F \int_0^L \Phi_2(x) z^s(x) dx + m_1 \lambda_1^s \dot{y}_{10} + m_2 \lambda_2^s \dot{y}_{20} = \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j \left[\rho F \int_0^L z^j(x) z^s(x) dx + m_1 \lambda_1^j \lambda_1^s + \right. \right. \\ \left. \left. + m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s, \right. \right. \end{cases}$$

які з урахуванням умови ортогональності приймуть вид:

$$\rho F \int_0^L \Phi_1(x) z^s(x) dx + m_1 \lambda_1^s y_{10} + m_2 \lambda_2^s y_{20} = \delta^{js} \sum_{s=1}^5 M_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right];$$

$$\rho F \int_0^L \Phi_2(x) z^s(x) dx + m_1 \lambda_1^s \dot{y}_{10} + m_2 \lambda_2^s \dot{y}_{20} = \delta^{js} \sum_{s=1}^5 D_s \omega_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right].$$

Остаточно з урахуванням початкових умов при $x \neq l^*$ і $j = s$ одержимо наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} M_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right] &= 0; \\ D_s \omega_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right] &= m_1 \lambda_1^s V_1 + m_2 \lambda_2^s V_{01}. \end{aligned}$$

При $x = l^*$ і $j = s$ буде:

$$D_s \omega_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right] = \rho F \int_0^L \Phi_2(l^*) z^s(x) dx + m_1 \lambda_1^s V_1 + m_2 \lambda_2^s V_{01}.$$

Звідси одержимо:

$$M_s = 0$$

$$D_s = \frac{m_1 \lambda_1^s V_1 + m_2 \lambda_2^s V_{01}}{\omega_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right]}, \text{ при } x \neq l^*;$$

$$D_s = \frac{\rho F V_1 z^s(l^*) + m_1 \lambda_1^s V_1 + m_2 \lambda_2^s V_{01}}{\omega_s [\rho F z^{s^2}(l^*) + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2}]}, \text{ при } x = l^*. \quad (3.23)$$

У результаті прогин рейки з урахуванням підресореної маси вагона і ненульових початкових умов визначиться вираженням:

$$w(t, x) = \sum_{s=1}^5 z^s(x) D_s \sin \omega_s t. \quad (3.24)$$

Далі знайдемо прогини рейки з урахуванням ударної взаємодії колеса вагона з поверхнею його катання з координатою l^* на основі енергетичного підходу [84].

При цьому швидкість руху рейки V_1 у перерізі з координатою l^* розрахуємо, з огляду на [83,84], наступним чином.

Рівняння вигнутої осі рейки (див. рис. 3.4, де $w = y$) запишемо, використовуючи метод початкових параметрів [91,93], у виді:

$$y(x) = y_0 + y_0' x + \frac{1}{EJ} \left[\sum_{i=0}^N P_i \frac{(x - l_i)^3}{3!} + \sum_{i=0}^N q_i \frac{(x - l_i)^4}{4!} \right], \quad (3.25)$$

де $y(x)$ – поточний прогин рейки;

y_0 – прогин рейки на початку координат;

y_0' – кут повороту рейки на початку координат;

P_i, q_i – сили і розподілені навантаження, прикладені до рейки;

l_i – координати додатка зовнішніх сил і розподілених навантажень.

Тут силовими факторами є: зусилля P_0 , що визначає процеси ударної взаємодії колісної пари і рейки в момент їхнього контакту, сили $P_1 \div P_N$ ($N = 23$ – число проміжних опор), рівні $P_i = c_1 y_i$ силам пружності опор, розподілене інерційне навантаження $q = \gamma F$.

Перетворимо (3.25) до виду

$$y(x) = y_0 + y_0' x + \frac{1}{EJ} \left[P_0 \frac{(x - l^*)^3}{6} - \sum_{i=1}^N c_i y_i \frac{(x - l_i)^3}{6} + q \frac{x^4}{24} \right], \quad (3.26)$$

де l_i – відстань до i -тої проміжної опори,

і далі до виду

$$y(x) = y_0 + y_0' x + \left[P_0 \frac{S(l^*)(x - l^*)^3}{6} - \sum_{i=1}^{23} k_i \frac{S(l_i)(x - l_i)^3}{6} + q \frac{x^4}{24} \right] \frac{1}{EJ}, \quad (3.27)$$

де $k_i = c_i y_i$ – коефіцієнти в поліномі, при доданках третього ступеня, що відповідають зосередженим силам пружних опор;

$S(l_i)$ – одинична функція ($S = 1(x)$ при $x \geq l_i$).

Невідомі значення коефіцієнтів k_i , а також початкові параметри y_0 і y_0' знайдемо підстановкою у вираження (3.25) значень прогинів рейки при $x = L$ (силових, геометричних граничних умов), а також величин y_i – прогинів рейки на проміжних i -тих пружних опорах [84-86,90]. В результаті одержимо 25 рівнянь, розв'язання яких і дозволяє знайти залежність $y(x)$. При цьому максимальне значення прогину при $x = 0$ дорівнюватиме y_0 .

Рівняння вигнутої осі рейки, статично навантаженої силою P_0 , представлено співвідношенням (3.27). Якщо під дією ударного впливу переріз у місці його прикладення (l^*) переміститься на величину $y(l^*)$, тоді переміщення рейки можна записати у виді [84, 93]:

$$y(x) = \frac{y_a(l^*)}{y_{ст}(l^*)} (y_0 + y_0' x + \left[P_0 \frac{S(l^*)(x - l^*)^3}{6} - \sum_{i=1}^{23} k_i \frac{S(l_i)(x - l_i)^3}{6} + q \frac{x^4}{24} \right] \frac{1}{EJ}). \quad (3.28)$$

де $y_{ст}(l^*)$ – статичний прогин перерізу від сили $P_0 = 1\text{Н}$ на відстані l^* від кінця рейки;

$y_a(l^*)$ – амплітудне значення прогину на відстані l^* від краю рейки.

Швидкість руху цього перерізу при ударі, знайдемо з рівняння:

$$V_c = \frac{dy_a(l^*)}{dt} \frac{1}{y_{cr}(l^*)} (y_0 + y_0' x + \left[P_0 \frac{S(l^*)(x-l^*)^3}{6} - \sum_{i=1}^{23} K_i \frac{S(l_i)(x-l_i)^3}{6} + q \frac{x^4}{24} \right] \frac{1}{EJ}). \quad (3.29)$$

Для визначення післяударної швидкості застосуємо енергетичний метод [87] і розглянемо кінетичну енергію елемента балки довжиною dx :

$$dT = \frac{V_c^2 \rho F dx}{2g} = \frac{\rho F dx}{2g} \left[\frac{dy_a(l^*)}{dt} \frac{1}{y_{cr}(l^*)} (y_0 + y_0' x + \left[P_0 \frac{S(l^*)(x-l^*)^3}{6} - \sum_{i=1}^{23} K_i \frac{S(l_i)(x-l_i)^3}{6} + q \frac{x^4}{24} \right] \frac{1}{EJ}) \right]^2. \quad (3.30)$$

Енергія всієї рейки довжиною L буде:

$$T = \int_0^L dT. \quad (3.31)$$

Наприкінці першого етапу удару при $V_1 = \frac{dy_a(l^*)}{dt}$ кінетична енергія рейки визначиться як

$$T = \int_0^L \frac{\rho F dx}{2g} \left[\frac{V_1}{y_{cr}(l^*)} (y_0 + y_0' x + \left[P_0 \frac{S(l^*)(x-l^*)^3}{6} + \sum_{i=1}^{23} K_i \frac{S(l_i)(x-l_i)^3}{6} + q \frac{x^4}{24} \right] \frac{1}{EJ}) \right]^2. \quad (3.32)$$

Зміна кінетичної енергії T_1 системи "колесо – рейка" наприкінці удару може бути визначена як:

$$T_1 = \frac{Q_1 V_{01}^2}{2g} - \frac{Q_1 V_1^2}{2g} - V_1^2 \frac{\rho F}{2g y_{2cr}^2(l^*)} \int_0^L (y_0 + y_0' x +$$

$$+ \left[P_0 \frac{S(l^*)(x-l^*)^3}{6} + \sum_{i=1}^{23} K_i \frac{S(l_i)(x-l_i)^3}{6} + q \frac{x^4}{24} \right] \frac{1}{EJ}, \quad (3.33)$$

де Q_1 – вага колеса.

Цю же енергію можна обчислити наступним чином.

Кінетична енергія, втрачена колесом при зменшенні швидкості з V_{01} до V_1 , буде:

$$\frac{Q_1}{2g}(V_{01} - V_1)^2. \quad (3.34)$$

При цьому кінетична енергія рейки за рахунок здобутої швидкості $(0 - V_1)$ зміниться на величину

$$(0 - V_1)^2 \frac{\rho F}{2gy_{ct}^2(l^*)} \int_0^L (y_0 + y_0'x + \left[P_0 \frac{S(l^*)(x-l^*)^3}{6} + \sum_{i=1}^{23} K_i \frac{S(l_i)(x-l_i)^3}{6} + q \frac{x^2}{24} \right] \frac{1}{EJ})^2 dx \quad (3.35)$$

Відповідно до теореми Карно [83,84] сумарна кінетична енергія вантажу і балки, що відповідає втраченій швидкості колесом і здобутій швидкості балкою, дорівнює кінетичній енергії T_1 , тоді одержимо:

$$\begin{aligned} (V_{01} - V_1)^2 \frac{Q_1}{2g} + (0 - V_1)^2 \frac{\rho F}{2gy_{ct}^2(l^*)} \int_0^L (y_0 + y_0'x + [P_0 \frac{S(l^*)(x-l^*)^3}{6} + \\ + \sum_{i=1}^{23} K_i \frac{S(l_i)(x-l_i)^3}{6} + q \frac{x^2}{24}] \frac{1}{EJ})^2 dx = \frac{Q_1 V_{01}^2}{2g} - \frac{Q_1 V_1^2}{2g} - V_1^2 \frac{\rho F}{2gy_{ct}^2(l^*)} \int_0^L (y_0 + \\ + y_0'x + [P_0 \frac{S(l^*)(x-l^*)^3}{6} + \sum_{i=1}^{23} K_i \frac{S(l_i)(x-l_i)^3}{6} + q \frac{x^2}{24}] \frac{1}{EJ})^2 dx. \end{aligned}$$

Після спрощення:

$$2V_{01}V_1\frac{Q_1}{2g}=2V_1^2\frac{\rho F}{2gy_{cr}^2(l)}\int_0^L(y_0+y_0'x+[P_0\frac{S(l^*)(x-l^*)^3}{6}+\sum_{i=1}^{23}k_i\frac{S(l_i)(x-l_i)^3}{6}+q\frac{x^4}{24}]\frac{1}{EJ})^2dx,$$

звідси післяударна швидкість рейки разом з колісною парою буде:

$$V_1=\frac{2V_{01}gy_{cr}^2(l^*)}{\rho F\int_0^L(y_0+y_0'x+[P_0\frac{S(l^*)(x-l^*)^3}{6}+\sum_{i=1}^{23}k_i\frac{S(l_i)(x-l_i)^3}{6}+\frac{qx^4}{24}]\frac{1}{EJ})^2dx}. \quad (3.36)$$

Остаточно аналітичне вираження для визначення післяударної швидкості прийме вид

$$V_1=\frac{2V_{01}gy_{cr}^2(l^*)}{\rho F\int_0^L(y_0+y_0'x+[P_0\frac{S(l^*)(x-l^*)^3}{6}+\sum_{i=1}^{24}k_i\frac{S(l_i)(x-l_i)^3}{6}+\frac{qx^4}{24}]\frac{1}{EJ})^2dx}. \quad (3.37)$$

Отримане відповідно до (3.37) значення післяударної швидкості є базовою характеристикою для розрахунку прогинів рейки під шпалами.

У рівнянні (3.37) основними вихідними параметрами є величина доударної швидкості V_{01} і горизонтальна координата l^* ударної взаємодії колеса з рейкою. Їх величини розрахуємо наступним чином.

У момент проходження колісною парою стику рейкової колії система "вагон – колісна пара" робить балістичний рух, що починається в момент відриву колеса від віддаючої рейки і закінчується в момент торкання його приймаючої рейки. Для знаходження координати місця контакту і придбаної вертикальної швидкості V_{01} необхідно розглянути рух системи.

Для розв'язання задачі застосуємо рівняння Лагранжа другого роду [29,78,94-96]. Розглянемо модель механічної системи на фазі балістичного руху (рис. 3.6).

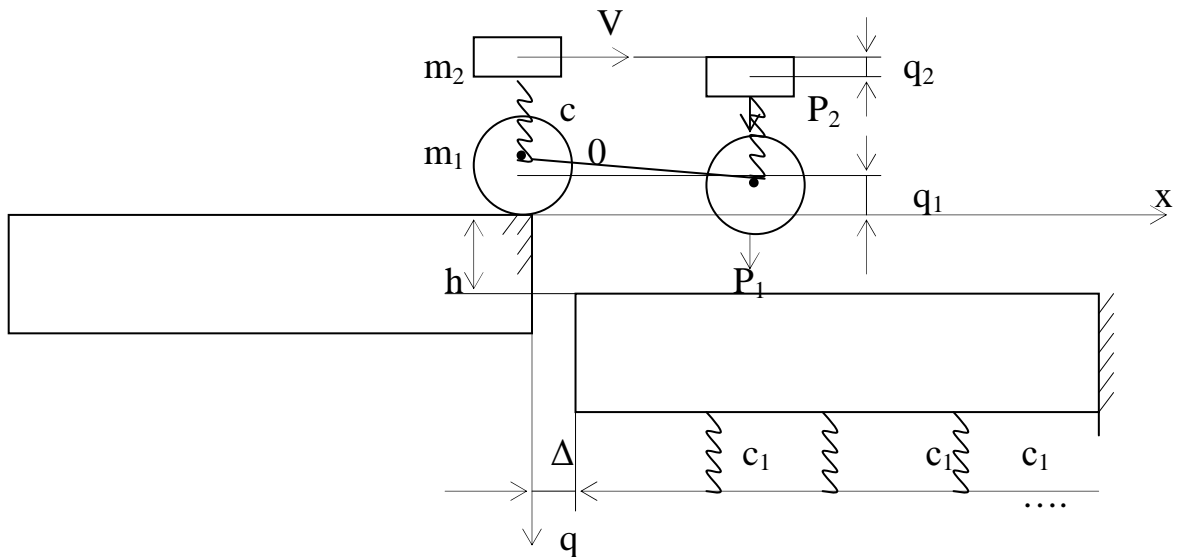


Рис. 3.6. Модель механічної системи на фазі балістичного руху

Тут: q_1 і q_2 – узагальнені координати для мас m_1 і m_2 ; P_1 і P_2 – сили ваги.

Кінетична і потенційна енергії системи:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \left[m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2 \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[m_1 V_{01}^2 + m_2 V_{02}^2 \right] \quad (3.38)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot c \cdot [f_{\text{ст}} + (q_2 - q_1)]^2 - \frac{1}{2} \cdot c \cdot f_{\text{ст}}^2 - P_1 q_1 - P_2 q_2, \quad (3.39)$$

$$\text{де } f_{\text{ст}} = \frac{P_1}{c}$$

Дисипативна функція Релея:

$$R = \frac{1}{2} \cdot b \cdot (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2, \quad (3.40)$$

де b – коефіцієнт опору елемента підвіски.

Динамічна модель системи, з огляду на (3.39) ÷ (3.41), при початкових умовах

$$\begin{cases} q_1|_{t=0} = \dot{q}_1|_{t=0} = 0; \\ q_2|_{t=0} = \dot{q}_2|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

буде:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + b(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + c(q_1 - q_2) = P_1 + P_2; \\ m_2 \ddot{q}_2 + b(q_2 - q_1) + c(q_2 - q_1) = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

Для підгумового колеса рівняння (3.41) системи має наступний вид:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + b_r(\dot{q}_1 - \dot{q}_3) + c_r(q_1 - q_3) &= P_1 + P_2 + P_3; \\ m_2 \ddot{q}_2 + b(\dot{q}_2 - \dot{q}_3) + c(q_2 - q_3) &= 0; \\ m_3 \ddot{q}_3 + (c + c_r)\dot{q}_3 + (c + c_r)q_3 &= b_r\dot{q}_1 + b\dot{q}_2 + c_rq_1 + cq_2; \\ q_3|_{t=0} = \dot{q}_3|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

де P_2, P_3 – сили ваги мас m_2 і m_3 на рис. 2.1,б.

Розв'язання системи (3.41) знайдемо у виді:

$$\begin{cases} q_1 = x_1 + q_1^*; \\ q_2 = x_2 + q_2^*; \end{cases} \quad (3.42)$$

де q_1^*, q_2^*, x_1, x_2 – часткові і загальні рішення рівняння відповідно,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \alpha t + e^{\alpha t}(\kappa_1 \cos pt + \kappa_2 \sin pt), \\ x_2 &= x_0 + \alpha t + e^{\alpha t}((\kappa_1 u_1 + \kappa_2 u_2) \cos pt + (\kappa_1 u_2 - \kappa_2 u_1) \sin pt), \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$q_1^* = x_0 + \alpha t + e^{\alpha t} (\kappa_1 \cos pt + \kappa_2 \sin pt) + D_1 + D_3 \frac{t^2}{2},$$

$$q_2^* = x_0 + \alpha t + e^{\alpha t} [(\kappa_1 u_1 + \kappa_2 u_2) \cos pt + (\kappa_1 u_2 - \kappa_2 u_1) \sin pt] + D_3 \frac{t^2}{2},$$
(3.44)

$$z = \frac{\alpha u_2 - p - p u_1}{\alpha - \alpha u_1 - p u_2}, \quad \kappa_2 = \frac{-D_1}{z - z u_1 u_2}, \quad D_1 = \frac{p_2}{c},$$

$$\kappa_1 = \kappa_2 \cdot z, \quad D_3 = -\kappa_1 \alpha - \kappa_2 p, \quad x_0 = -\kappa_1 - D_1,$$

$$u_1 = \frac{m_1 \cdot (\alpha^3 b + \alpha^2 c + \alpha p^2 b - c p^2)}{(b\alpha + c)^2 + (bp)^2},$$

$$u_2 = \frac{m_1 \cdot (\alpha^2 p b + 2\alpha p c + b p^3)}{(b\alpha + c)^2 + (bp)^2},$$

$$p = \frac{\sqrt{[(m_1 + m_2)^2 \cdot b^2 - 4c m_1 m_2 \cdot (m_1 + m_2)]}}{2m_1 m_2},$$

$$\alpha = \frac{-(m_1 + m_2)b}{2m_1 m_2}.$$

Час t^* балістичного руху колісної пари до удару визначимо, з огляду на рис. 3.6, співвідношенням

$$q_1|_{t=t^*} = h.$$

Тоді доударні швидкості V_{01} і V_{02} визначимо як

$$\dot{V}_{01} = \dot{q}_1|_{t=t^*} = \alpha + D_3 t^* + e^{\alpha t^*} [\kappa_1 (\alpha \cdot \cos pt^* - p \cdot \sin pt^*) + \kappa_2 (\alpha \cdot \sin pt^* + p \cdot \cos pt^*)]. \quad (3.45)$$

$$\dot{V}_{02} = \dot{q}_2|_{t=t^*} = \alpha + D_3 t^* + e^{\alpha t^*} [\kappa_1 \alpha \cos pt^* + \kappa_2 \sin pt^*].$$

Координата l^* прикладення ударного імпульсу буде:

$$l^* = V_x t^* - \Delta, \quad (3.46)$$

де V_x – швидкість руху вагона в момент проходження стикової нерівності.

Величини швидкостей V_{01}, V_{02} і лінійної координати ударної взаємодії l^* використовуються в розділах 3, 4 даної роботи при розрахунку параметрів динамічної взаємодії вагона з рейковою колією в місці ізольованої стикової нерівності з урахуванням експлуатаційних факторів.

3.2 Вплив завантаження вагона на характеристики жорсткості рейкової колії в місці стикової нерівності з урахуванням плоскої деформації стикової накладки

У даному розділі роботи розглянуто вплив завантаження вагона на характеристики жорсткості приймаючої рейки (c_p) при наявності стикової накладки.

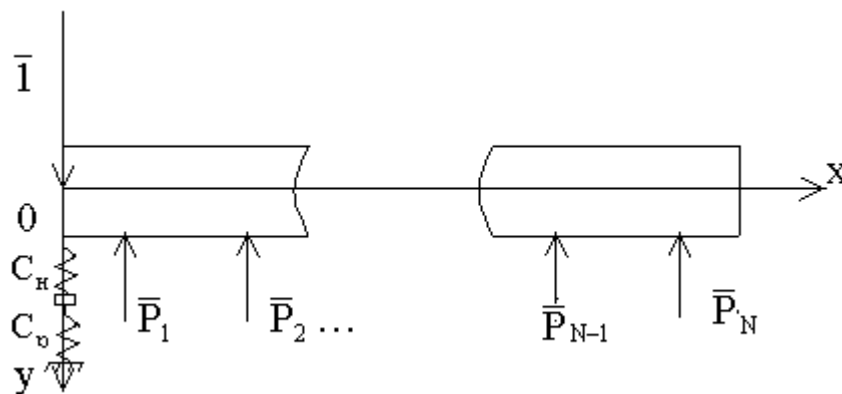


Рис. 3.7. Схема навантаження приймаючої рейки одиничною силою

При цьому приймається [83,84], що при навантаженості приймаючої рейки одиничною силою $\bar{1}$, у відповідність зі схемою на рис. 3.7, з урахуванням дії стикової накладки (c_n), що випробує плоский напружений стан, а також віддаючої рейки, з урахуванням її деформації за схемою на

рис. 3.8, її еквівалентна жорсткість на кінці буде:

$$c_{p.k.} = 1 / \left(\frac{1}{c_n} + \frac{1}{c_p} \right) \quad (3.47)$$

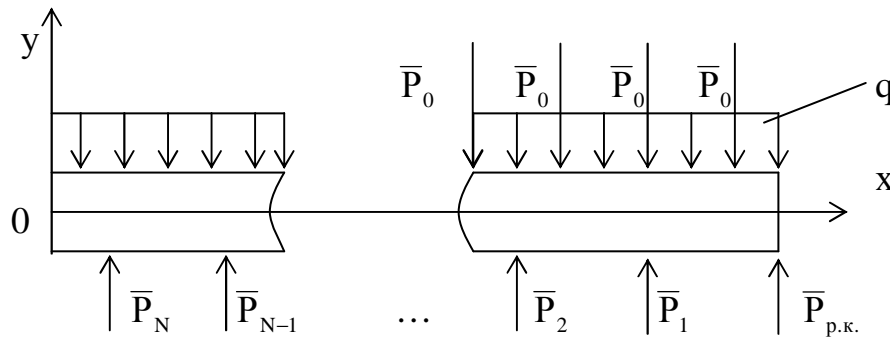


Рис. 3.8. Схема навантаження віддаючої рейки

На рис. 3.7 $P_{1 \div N}$ – сили реакції ($P_i = c_1 y_i$) пружних опор рейки ($N = 23$). На рис. 3.8 – P_0 – сила ваги вагона, що приходить на одне колесо, $P_{p.k.} = c_{p.k.} \cdot y_{p.k.}$ – еквівалентна сила пружності накладки і приймаючої рейки, прикладена на кінці віддаючої рейки. Координати сил пружності P_N відповідають рис. 3.4.

Для визначення жорсткості приймаючої рейки на кінці необхідно оцінити її прогин під дією прикладеної на кінці вертикальної одиничної сили $\bar{1}$ у відповідності зі схемою навантаження на рис. 3.7.

Для визначенні вертикального переміщення торця рейки (при $x = 0$) під дією одиничної сили $\bar{1}$ застосуємо метод початкових параметрів [84,91]:

$$y(x) = y_0 + y'_0 x + \frac{1}{EJ} \left[\frac{1 \cdot x^3}{6} - \sum_{i=1}^N c_1 y_i \frac{(x - l_i)^3}{6} \right]. \quad (3.48)$$

Невідомі значення коефіцієнтів у (3.48) знайдемо аналогічно рівнянню (3.25) розділу 3.1 даної роботи.

Початкові параметри y_0 і y'_0 визначаються з умови закріплення рейки (див. рис. 3.2,3.3): якщо її правий кінець жорстко закріплений, тоді $y(L) = y'(L) = 0$, якщо ж він вільний, то буде

$$\frac{\partial^2 y(L)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 y(L)}{\partial x^3} = 0. \quad (3.49)$$

Розв'язуючи (3.48) чисельно, визначимо прогини рейки y_i на проміжних опорах.

У результаті одержимо аналітичні залежності, що визначають прогини рейки в будь-якій її точці:

$$y(x) = y_0 + y'_0 x + \frac{1}{EJ} \left[\frac{x^3}{6} - \sum_{i=1}^N \kappa_i \frac{S(l_i)}{6} (x - l_i)^3 \right], \quad (3.50)$$

де $\kappa_i = c_i y_i$;

$S(x)$ – одинична функція з координатою прикладення l_i .

Коефіцієнти κ_i знайдемо із системи рівнянь, що виходить шляхом підстановки в (3.50) значень прогинів рейки на проміжних опорах, а також умов закріплення (3.49). У результаті одержимо 25 рівнянь з 25 невідомими. Після знаходження цих невідомих, разом з початковими параметрами, прогин на кінці приймаючої рейки буде:

$$y(0) = y_0. \quad (3.51)$$

Оскільки $y(0)$ – прогин під дією одиничної сили при $x = 0$, то жорсткість рейки на кінці визначимо за формулою [84,91]:

$$c_p = \frac{1}{y_0}. \quad (3.52)$$

У даній роботі прийнято, що накладка має прямокутну форму, показану на рис. 3.9. Тут b – товщина накладки, Δ – її довжина, що відповідає зазору між торцями віддаючої і приймаючої рейок, h – висота накладки, \bar{p}

– нормаль до граничних поверхонь накладки.

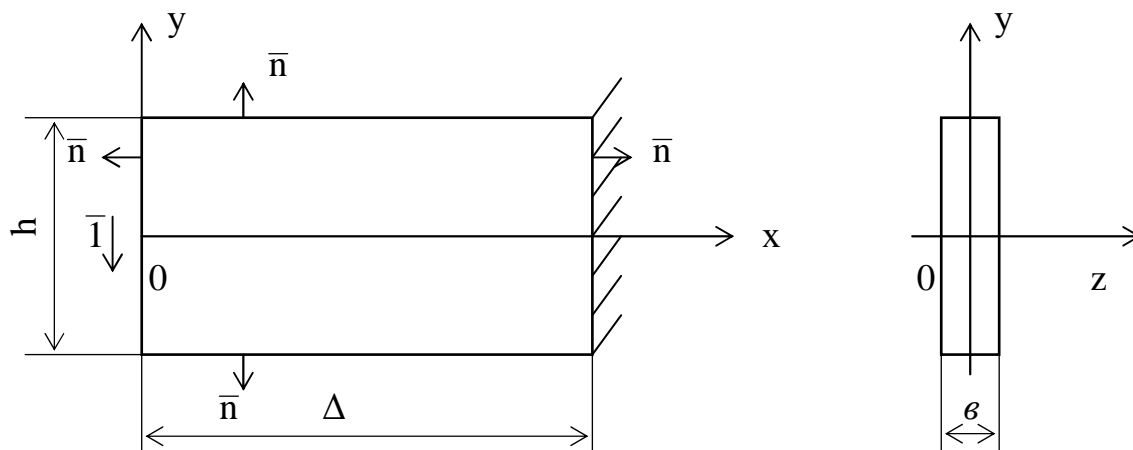


Рис. 3.9. Схема закріплення і навантаження накладки

На практиці для накладки стику рейкової колії виконується умова $h \gg \Delta$ [5,11,12,62].

Тому для визначення її характеристики жорсткості застосуємо методи теорії пружності при наступних допущеннях [97-100]:

- відсутні переміщення зі своєї площини (плоский напружений стан);
- через малість розміру накладки в напрямку осі z і відсутності напруг на її бічних площинах, будемо вважати, що напруження на площадках, паралельних площині xOy , мало відмінні від нуля, тобто приймемо, що

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

де σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} – нормальні і дотичні напруження в накладці.

У даному випадку, тобто при плоскому напруженому стані, ненульовими є тільки три компоненти тензора напружень:

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \neq 0.$$

Тоді буде виконуватися

$$U = U(x,y), \quad V = V(x,y),$$

де $U(x,y)$, $V(x,y)$ – прогини накладки в напрямку осей x і y .

При цьому деформації накладки є функціями координат x і y :

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} = \epsilon_x(x, y); \\ \epsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} = \epsilon_y(x, y); \\ \epsilon_z &= 0; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \gamma_{xy}(x, y);\end{aligned}\tag{3.53}$$

Відповідно до [100] напруження в накладці визначаються зі співвідношень:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_x + \mu\epsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_y + \mu\epsilon_x); \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy},\end{aligned}\tag{3.54}$$

де E – модуль пружності матеріалу накладки,
 μ – коефіцієнт Пуассона.

Тут статичні рівняння рівноваги мають вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0, \end{cases}\tag{3.55}$$

де X і Y – об'ємні сили, прикладені до накладки в напрямку осей x і y відповідно. У нашому випадку ними можна зневажити, тому що власна вага накладки значно менше навантажень, що діють на неї.

Граничні умови будуть [98-100]:

$$\begin{aligned}\sigma_x n_1 + \tau_{xy} n_2 &= p_{1x}; \\ \tau_{yx} n_1 + \sigma_y n_2 &= p_{2y}\end{aligned}\quad (3.56)$$

де n_1, n_2 – направляючі косинуси на границях (зовнішніх поверхнях) накладки;

p_{1x}, p_{2y} – зовнішні поверхневі навантаження.

Представимо з урахуванням прийнятих допущень рівняння (3.54) у виді рівнянь Бельтрамі – Мітчела [98-100]:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_1 &= 0; \\ \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} I_1 &= 0; \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} I_1 &= 0,\end{aligned}\quad (3.57)$$

де $\nabla^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ – оператор Лапласа;

$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ – перший інваріант напружень.

Уведемо [100] функцію напружень $\varphi = \varphi(x, y)$:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (3.58)$$

Далі підставимо співвідношення (3.58) у рівняння (3.57) Бельтрамі – Мітчела, а перший інваріант напружень представимо у виді:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_x + \sigma_y + \mu(\sigma_x + \sigma_y) = (1 + \mu)(\sigma_x + \sigma_y) = \\ &= (1 + \mu) \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = (1 + \mu) \nabla^2 \varphi . \end{aligned}$$

При цьому з першого рівняння (3.57) одержимо:

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_1 = 0 ,$$

звідси

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} ((1 + \mu) \nabla^2 \varphi) = 0$$

або

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 \varphi = 0 .$$

Змінімо порядок диференціювання:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0 \tag{3.59}$$

або по координатно:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 . \tag{3.60}$$

Інші два рівняння Бельтрамі – Мітчела будуть мати аналогічний вид.

Бігармоничні рівняння (3.59), (3.60) є дозволяючим рівнянням плоскої задачі для накладки стику рейкової колії.

Для його розв’язання перетворимо граничні умови (3.56) через функцію напруження (3.58):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} n_1 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} n_2 &= p_{1n}; \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} n_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} n_2 &= p_{2n},\end{aligned}\tag{3.61}$$

де p_{1n} , p_{2n} – поверхневі навантаження, прикладені до границі зовнішніх поверхонь накладки нормально n .

Для визначення жорсткості накладки розглянемо схему, приведену на рис. 3.9, і навантажимо її одиничною силою. Потім визначимо її прогин у напрямку осі Oy . При цьому будемо вважати, що одинична сила, прикладена до лівого краю, розподілена по висоті і ширині рівномірно.

Функцію напруження знайдемо у виді полінома третього ступеня [100]:

$$\varphi = b_2 xy + d_4 xy^3.\tag{3.62}$$

З (3.58) одержуємо вираження для напружень:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 6d_4 xy; \\ \sigma_y &= 0; \\ \tau_{xy} &= -(b_2 + 3d_4 y^2).\end{aligned}\tag{3.63}$$

Розглянемо лівий край накладки, навантажений одиничною силою. У цьому випадку поверхнева сила p_{2x} (напрямок сили – по осі y , на площадці нормальної x), проінтегрована по площадці дорівнюватиме одиничній силі, тобто

$$\iint_F p_{2x} dF = -1 ,$$

або з граничних умов (3.56), з урахуванням того, що направляючі косинуси на цій грані рівні $n_1 = -1$; $n_2 = 0$ одержимо

$$-\iint_F \tau_{yx} dF = -1 .$$

або, оскільки по товщині накладки напруження не змінюється,

$$b \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dy = 1,$$

чи, з урахуванням співвідношення (3.63),

$$\int_{-h/2}^{h/2} (b_2 + 3d_4 y^2) dy = -\frac{1}{b} .$$

Остаточно буде:

$$b_2 h + d_4 \frac{h^3}{4} = -\frac{1}{b} . \quad (3.64)$$

Це одне з рівнянь для перебування констант (b_2 і d_4) функції (3.62) напружень.

Далі розглянемо верхню ($y = h/2$) і нижню ($y = -h/2$) границі накладки. Для них направляючі косинуси $n = \{0; \pm 1\}$, а граничні умови, з огляду на те, що ці поверхні не навантажені:

$$\pm \tau_{xy} = 0;$$

$$\pm \sigma_y = 0.$$

При цьому друге рівняння (3.63) задовольниться тотожно. З першого одержимо, з урахуванням того, що $y = \pm h/2$:

$$\pm (b_2 + 3d_4 \frac{h^2}{4}) = 0.$$

Його можна записати у виді (друге вираження для визначення невідомих констант):

$$b_2 = -\frac{3}{4}h^2d_4. \quad (3.65)$$

Розглянувши тепер спільно вираження (3.64) і (3.65), визначимо константи b_2 , d_4 функції напруження:

$$d_4 = \frac{2}{bh^3}; \quad b_2 = -\frac{3}{2h}. \quad (3.66)$$

З урахуванням (3.66) співвідношення (3.53) для напружень представимо у виді:

$$\epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{12xy}{Ebh^3};$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\mu\sigma_x}{E} = \frac{12\mu \cdot xy}{Ebh^3}.$$

Далі після інтегрування по відповідним перемінним x і y одержимо:

$$U(xy) = \frac{6x^2y}{Ebh^3} + f_1(y);$$

$$V(xy) = \frac{\mu 6xy^2}{Ebh^3} + f_2(x), \quad (3.67)$$

де $f_1(y), f_2(x)$ – функції, що залежать тільки від однієї перемінної і ви-

значаються з граничних умов.

Представимо (3.67) з урахуванням $J = \frac{bh^2}{12}$ у виді

$$U(x, y) = \frac{x^2 y}{2EJ} + f_1(y);$$

$$V(xy) = \frac{\mu xy^2}{2EJ} + f_2(x),$$

тут J – статичний момент інерції перерізу накладки [84].

Тоді рівняння для кутових деформацій прийме вид

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}$$

або

$$\frac{x^2}{2EJ} + \frac{df_1(y)}{dy} + \frac{\mu y^2}{2EJ} + \frac{df_2(x)}{dx} = -\frac{1}{2JG}(e^2 - y^2), \quad (3.68)$$

$$\text{де } e^2 = \sqrt{\frac{b_n h_n^3}{4}}.$$

Уведемо наступні позначення:

$$F_1(x) = \frac{x^2}{2EJ} + \frac{df_2(x)}{dx}; \quad F_2(y) = \frac{df_1(y)}{dy} + \frac{\mu y^2}{2EJ} - \frac{y^2}{2JG}; \quad \kappa = -\frac{e^2}{2JG}.$$

Тоді рівняння (3.68) можна записати у виді

$$F_1(x) + F_2(y) = \kappa. \quad (3.69)$$

З рівняння (3.69), з огляду на [100], одержимо, що функції $F_1(x) = e_1$; $F_2(y) = e_2$ дорівнюють деяким константам.

Тоді рівняння (3.68) наведеться до виду

$$e_1 + e_2 = -\frac{e^2}{2JG}. \quad (3.70)$$

Нехай

$$\frac{df_2(x)}{dx} = -\frac{x^2}{2EJ} + e_1; \quad \frac{df_1(y)}{dy} = -\frac{\mu y^2}{2EJ} + \frac{y^2}{2JG} + e_2.$$

Тоді для функцій f_1 і f_2 одержимо:

$$f_1(y) = -\frac{\mu y^3}{6EJ} + \frac{y^3}{6JG} + e_2 y + e_3;$$

$$f_2(x) = -\frac{x^3}{6EJ} + e_1 x + e_4$$

У такому випадку

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{x^2 y}{2EJ} - \frac{\mu y^3}{6EJ} + \frac{y^3}{6JG} + e_2 y + e_3; \\ V(x, y) &= \frac{\mu x y^2}{2EJ} - \frac{x^3}{6EJ} + e_1 x + e_4. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Постійні інтегрування e_1, e_2, e_3, e_4 у (3.71) визначимо з рівняння (3.70) з урахуванням умов закріплення накладки:

$$\text{при } x = \Delta \text{ і } y = 0 \quad U(\Delta, 0) = 0, V(\Delta, 0) = 0, \dot{U}_y(\Delta, 0) = 0.$$

Тоді одержимо

$$e_2 = -\frac{\Delta^2}{2EJ} ; e_3 = 0; e_4 = \frac{\Delta^3}{6EJ} - e_1\Delta ;$$

$$\dot{U}_y = \frac{x^2}{2EJ} - \frac{\mu y^2}{2EJ} + \frac{3y^2}{6JG} + e_2 = 0$$

З (3.70) знайдемо останню константу:

$$e_1 = \frac{\Delta^2}{2EJ} - \frac{e^2}{2JG} .$$

Підставляючи знайдені константи у вираження (3.71) одержуємо рівняння вигнутої осі (при $y = 0$):

$$V(x,0) = -\frac{x^3}{6EJ} + \frac{\Delta^2 x}{2EJ} + \frac{\Delta^3}{3EJ} + \frac{e^2}{2JG}(\Delta - x) .$$

З цього рівняння одержимо прогин на консолі від одиничної сили в точці з координатами $x = 0, y = 0$:

$$V(0,0) = \frac{\Delta^3}{3EJ} + \frac{e^2}{2JG} \Delta . \quad (3.72)$$

При цьому прогин на початку координат (при $x = 0$) під дією одиничної сили буде визначати жорсткість накладки:

$$c_n = \frac{1}{V(0,0)} . \quad (3.73)$$

Жорсткість накладки можна також визначити, виходячи зі схеми розрахунку на вигин [84,91]. Розглянемо деформацію накладки з вільним кінцем ліворуч і жорстко затисненої праворуч під дією одиничної сили, при-

кладеної на вільному кінці (рис. 3.10), використовуючи методи, описані в роботі [84,91].

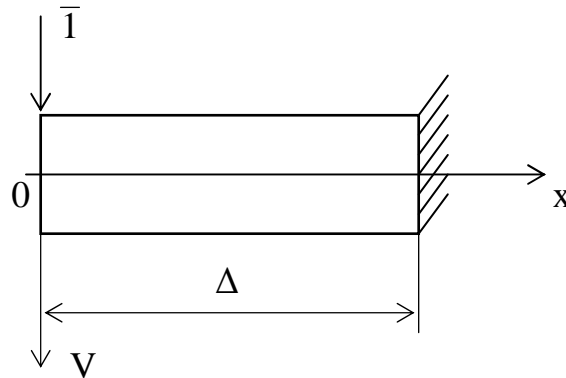


Рис. 3.10. Схема накладки

Тоді одержимо, що

$$V = \frac{\Delta^3}{3JE}, \quad (3.74)$$

де Δ – ширина стику,

а жорсткість накладку визначається за формулою:

$$c_n = \frac{1}{V}. \quad (3.75)$$

Розглянемо жорсткість двох двохголових накладок для рейки типу Р–65 ($E = 2,6 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $J = 3573$ см⁴ [5]). На рис. 3.11 показана характеристика жорсткості накладку в залежності від величини зазору. Тут кривою 2 показана жорсткість, розрахована за формулою (3.73), отриманої в результаті розв’язання плоскої задачі теорії пружності, а кривою 1 показана жорсткість, розрахована за формулою (3.75), отриманою для вигину балки.

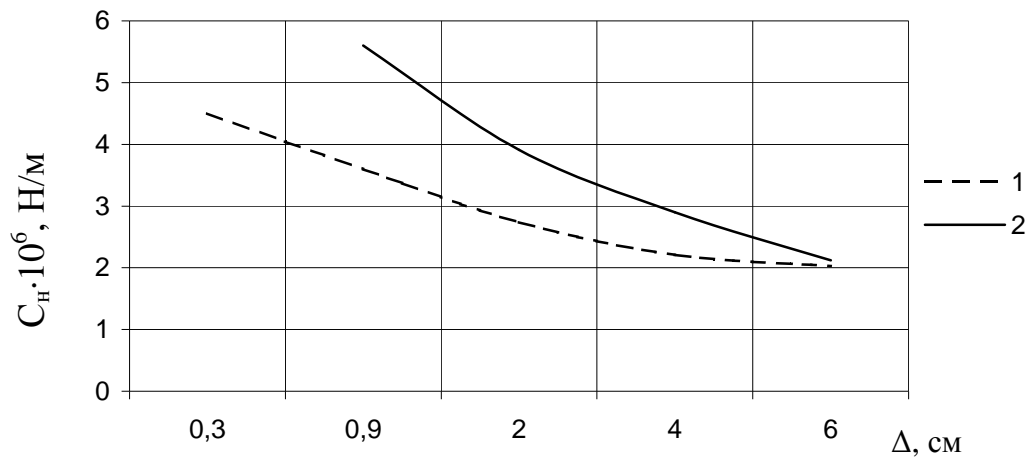


Рис. 3.11. Характеристика жорсткості накладки рейки Р-65

Характеристики носять монотонно убуючий гіперболічний характер. Більш точне значення жорсткості накладки дає формула (3.73). Розходження між коефіцієнтами жорсткості, обумовленими за формулами (3.73) і (3.75) при $\Delta = (0,9; 4; 6)$ см складає відповідно (47; 34,3; 4) %. Для $\Delta > 6$ см графіки жорсткості на рис. 3.16 зливаються, тобто формули (3.73), (3.75) дають практично однаковий результат.

Остаточно з урахуванням жорсткості $c_{p.k.}$ накладки на кінці або віддаючої чи приймаючої рейок визначимо наступним чином:

Для визначення переміщення зі співвідношення (3.57) необхідно визначити додаткову жорсткість рейки, одержувану від накладки (c_p). Вона буде визначатися як сума жорсткостей власне накладки і приймаючої рейки:

$$c_{p.k.} = \frac{c_n \cdot c_p}{c_n + c_p} \quad (3.76)$$

При цьому жорсткість приймаючої рейки c_p визначається з урахуванням додатково і жорсткості баластового шару.

3.3 Дослідження впливу експлуатаційних і конструктивних параметрів транспортного засобу й умов закріплення приймаючої рейки колії на прогини рейок у місці стику типу «зазор»

Параметри силової ударної і динамічної взаємодії вагона з приймаючою рейкою в місці ізольованої стикової нерівності типу "зазор" розглянуті в розділі 2.1 роботи. Було встановлено, що ударний імпульс, сприйманий з боку минаючого стик колеса вагона, є функцією швидкості V_x вагона, приведеної маси m_1 колеса, а також величини зазору Δ і висоти h стику. Він змінюється в діапазоні $S_{\text{ду}} = [3,14 \div 1504,98]$ Н·с для стику типу "зазор", тобто при працюючих, абсолютно жорстких накладках, і в діапазоні $S_{\text{ду}} = [82,9 \div 4642,1]$ Н·с для стику типу "зазор – ступінь вгору", тобто при працюючих накладках, що випробують плоску деформацію, або ж при непрацюючих (кінці рейок у місці стику вільні) накладках (див. табл. 3.1). При цьому під колесом вагона, що наїхало на віддаючу рейку, кінець віддаючої рейки прогинається, а стик типу "зазор" трансформується в стик типу "зазор – ступінь вгору" [1-3,28,110].

У даному розділі роботи проведені дослідження впливу експлуатаційних характеристик вагона на прогини віддаючої і приймаючої рейок у місці стикової нерівності на фазі 1 доударної взаємодії (див. розділ 2.1) для визначення реально виникаючої при цьому висоти ступіні h стику з метою наступного розрахунку ударного імпульсу $S_{\text{ду}}$, що реально впливає з боку вагона на лівий кінець приймаючої рейки. При цьому визначаються і реальні величини граничних умов для таблиці 3.2 розд. 3.1. Також додатково отримані і рівняння для розрахунку впливу конструктивних параметрів транспортного засобу, його вагових характеристик на прогини приймаючої рейки з урахуванням особливостей закріплення його кінців.

Механічна модель для розрахунку впливу завантаження чотиривісного вагона на висоту h ступіні стику приведена на рис. 3.12, де P_0 – поточне навантаження, що приходить з боку вагона на одне колесо колісної

пари (див. (3.79)), 1,3 – віддаюча і приймаюча рейки стику колії, 2 – наклад-
дка, 4,5 – пружні елементи, що моделюють жорсткість накладки і прийма-
ючої рейки, h_1 , h_2 – прогини кінців віддаючої і приймаючої рейок стику.

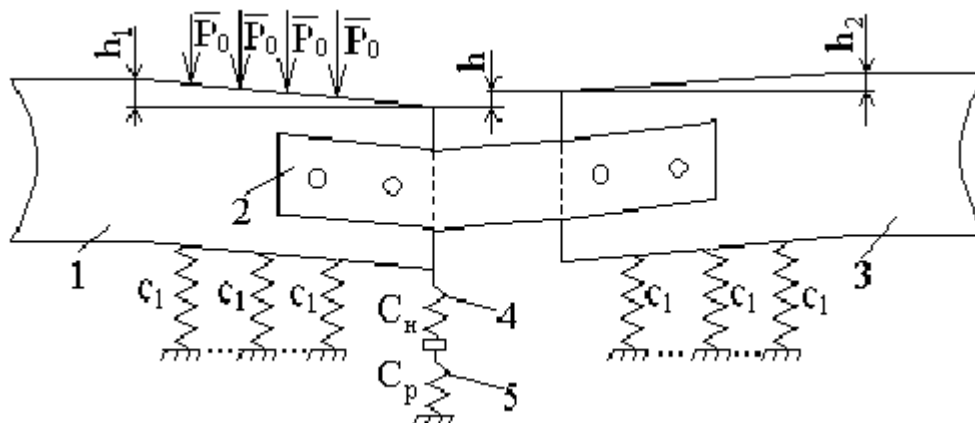


Рис. 3.12. Механічна модель для розрахунку геометричних параметрів взаємодії в системі «вагон – рейкова колія в місці стику»

Відповідно до рис. 3.12, при непрацюючих накладках, тобто коли кінці рейок у місці стику вільні, приймаємо $h_2 = 0$, $c_n = 0$ і $c_p = 0$.

При цьому жорсткості c_n , c_p і їхня еквівалентна жорсткість $c_{p.k.}$ визначаються вираженнями (3.52), (3.75) і (3.76) розділу 3.2.

Реально виникаючу висоту ступіні стику визначимо за формулою

$$h = h_1 - h_2, \quad (3.77)$$

де h_1 – прогин віддаючої рейки; h_2 – прогин приймаючої рейки, що визначається при послідовно з'єднаних C_n і C_p [95,96] за виразом

$$h_2 = h_1 \cdot \frac{c_n}{c_n + c_p}. \quad (3.78)$$

В (3.78) h_1 визначається методом початкових параметрів [84,91,101], що адаптований з урахуванням експлуатаційних параметрів вагона до віддаючої рейки у розділі 3.1 роботи. Схема навантаження віддаючої рейки колії показана на рис. 3.12.

Рівняння вигнутої осі віддаючої рейки прийме вид:

$$y(x) = y_0 + y'_0 x + \frac{1}{EJ} \left[\sum_{i=1}^4 P_0 \frac{(x + x_{0i} - L)^3}{6} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M_0 \frac{x^2}{2} - \sum_{i=1}^N c_1 y_i \frac{(x - l_i)^3}{6} - c_{p.k.} y_p \frac{(x - L)^3}{6} + q \frac{x^4}{24} \right] \quad (3.79)$$

У рівнянні (3.79): $q = \gamma F$ – погонна вага рейки; y_0, y'_0, Q_0, M_0 – початкові параметри (визначаються з граничних умов); x_{0i} ($i = \overline{1,4}$) – координати коліс вагона, відлічувані від правого кінця рейки (див. рис. 3.12); l_i – координати сил пружності, що виникають у місцях розміщення шпал у результаті прогину рейки і моделюючі пружні характеристики баластового шару (див. розділ 3.1); $N = 23$ – кількість шпал при довжині рейки $L = 12,5$ м.

Розглянемо варіанти закріплення лівого і правого кінців рейки: вони можуть бути вільними (не працюють накладки) чи зв'язаними накладкою (див. табл. 3.3).

Підставивши в рівняння (3.79) прогини рейки y_i ($i = 1 \div 23$) на проміжних опорах і y_p – на правому кінці, а також граничні умови закріплення одержимо 28 рівнянь для визначення 28 невідомих. При цьому висота h_1 у формулі (3.78) знайдеться підстановкою $x = L$ у формулу (3.79) прогинів віддаючої рейки, тобто

$$h_1 = y(L). \quad (3.80)$$

Відповідно до розділу 2.3 роботи на фазі 2 ударної взаємодії до лівого кінця приймаючої рейки прикладається ударний імпульс $S_{\text{ду}}$ з координатою $x = 0$. Механічна схема навантаження приймаючої рейки приведена на рис. 3.13. Умовні позначки, кількість і координати однойменних сил на рис. 3.8, 3.12 і 3.13 співпадають.

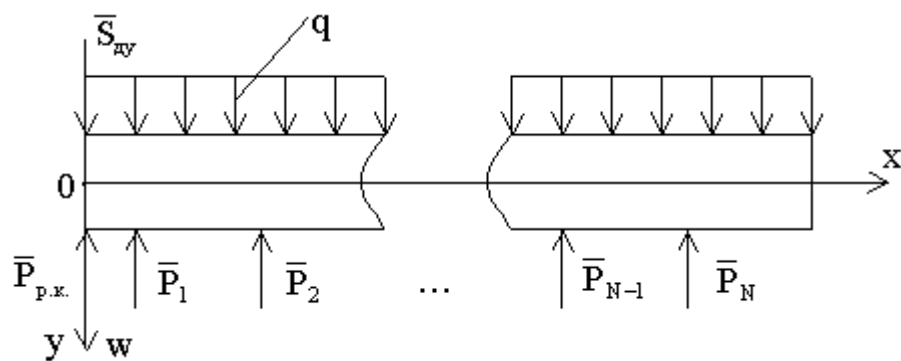


Рис. 3.13. Механічна схема навантаження приймаючої рейки

Диференціальне рівняння руху даної механічної системи, з огляду на [85,86,], а також результати розділу 3.1, має вид

$$\frac{\partial^4 w(t, x)}{\partial x^4} + \frac{\rho F}{EJ} \cdot \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} = - \sum_{i=1}^{23} \frac{P_i \delta(x - l_i)}{EJ} - \frac{P_{p.k.} \delta(x - 0)}{EJ}, \quad (3.81)$$

Таблиця 3.3

Варіанти закріплення лівого і правого кінців віддаючої рейки

Правий кінець Лівий кінець	Вільний	Працююча накладка
Вільний	$\frac{\partial^2 y(0)}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^2 y(L)}{\partial x^2} = 0;$ $\frac{\partial^3 y(0)}{\partial x^3} = 0; \frac{\partial^3 y(L)}{\partial x^3} = 0$	$\frac{\partial^2 y(0)}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial y(L)}{\partial x} = 0;$ $\frac{\partial^3 y(0)}{\partial x^3} = 0 ;$ $y(L) = \frac{\partial^3 y(L)}{\partial x^3} \cdot \frac{EJ}{c_{p.k.}}$
Працююча накладка	$\frac{\partial y(0)}{\partial x} = 0; \frac{\partial^2 y(L)}{\partial x^2} = 0;$ $y_0 = \frac{Q_0}{c_{p.k.}}; \frac{\partial^3 y(L)}{\partial x^3} = 0$	$\frac{\partial y(0)}{\partial x} = 0; \frac{\partial y(L)}{\partial x} = 0;$ $y_0 = \frac{Q_0}{c_{p.k.}} ;$ $y(L) = \frac{\partial^3 y(L)}{\partial x^3} \cdot \frac{EJ}{c_{p.k.}}$

Після удару колеса об рейку швидкість перерізу рейки в місці удару

($x = 0$) буде $V_1 = \frac{dy(0)}{dt}$ [83,84], при цьому кількість руху рейки, з огляду на (3.29), дорівнює

$$Q_p = \int_0^L \frac{\rho F dx}{g} \left(\frac{V_1}{y_{cr}(0)} (y_0 + y_0' x + \frac{1}{EJ} (P_0 \frac{S(x-0)x^3}{6} + \sum_{i=1}^{23} \kappa_i \frac{S(x-l_i)x^3}{6} + q \frac{x^4}{24})) \right), \quad (3.82)$$

де $P_0 = 1 \text{ Н}$.

Зміна кількості руху рейки після удару чисельно дорівнюватиме ударному імпульсу [83], тобто кількості руху, що втратить колесо в момент проходження стику на фазі 2 балістичного руху (див. розділ 2.3).

Остаточно можна записати:

$$S_{дy} = Q_p = \frac{V_1 \rho F}{g y_{cr}(0)} \int_0^L \left[y_0 + y_0' x + \frac{1}{EJ} \left(P_0 \frac{S(x-0)x^3}{6} + \sum_{i=1}^{23} \kappa_i \frac{S(x-l_i)x^3}{6} + q \frac{x^4}{24} \right) \right] dx.$$

З цього вираження можна одержати значення вертикальної швидкості рейки на фазі після удару:

$$V_1 = \frac{Q_p g y_{cr}(0)}{\rho F \int_0^L \left(y_0 + y_0' x + \frac{1}{EJ} \left[P_0 \frac{S(x-0)x^3}{6} + \sum_{i=1}^{23} \kappa_i \frac{\delta(x-l_i)x^3}{6} + q \frac{x^4}{24} \right] \right) dx}.$$

або

$$V_1 = \frac{Q_p g y_{cr}(0)}{\gamma F \left(y_0 L + \frac{y_0' L^2}{2} + \frac{1}{EJ} \left[\frac{P_0 L^4}{24} + \sum_{i=1}^{23} \frac{\kappa_i S(L-l_i)^4}{24} + \frac{q L^5}{120} \right] \right)}. \quad (3.83)$$

Таким чином, початкові умови в рівняннях (3.16) і (3.23) можна записати наступним чином:

$$w(0,x) = 0; \quad \dot{w}(0,x) = 0 \Big|_{x \neq 0}; \quad \dot{w}(0,0) = V_1.$$

Далі за аналогією з розділом 3.1 знайдемо власні частоти рейки, а за вираженнями (3.9), (3.11) – її прогини.

Якщо обидва кінці рейки вільні від накладки, то для визначення невідомих у (3.7), (3.9) застосуємо умови:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1''(0) = 0; \\ z_1'''(0) = 0; \\ z_1(l_1) = \rho(\kappa_1 l_1) \cdot z(0) + \frac{\varphi(\kappa_1 l_1)}{\kappa_1} \cdot z'(0) + \frac{\psi(\kappa_1 l_1)}{\kappa_1^2} \cdot z''(0) + \frac{\gamma(\kappa_1 l_1)}{\kappa_1^3} \cdot z'''(0); \\ z_i(l_i) = \rho(\kappa_1 l_i) \cdot z(0) + \frac{\varphi(\kappa_1 l_i)}{\kappa_1} \cdot z'(0) + \frac{\psi(\kappa_1 l_i)}{\kappa_1^2} \cdot z''(0) + \frac{\gamma(\kappa_1 l_i)}{\kappa_1^3} \cdot z'''(0) - \\ - \frac{c_1}{EJ\kappa_1^3} \sum_{j=1}^{i-1} z(l_j) \gamma[\kappa_1(l_i - l_{i-1})], \quad i = 2 \div 24; \\ z_{24}''(L) = 0; \\ z_{24}'''(L) = 0. \end{array} \right. \quad (3.84)$$

Якщо лівий кінець рейки вільний від накладки, то для такого випадку граничні умови будуть наступні:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1''(0) = 0; \\ z_1'''(0) = 0; \\ z_1(l_1) = \rho(\kappa_1 l_1) \cdot z(0) + \frac{\varphi(\kappa_1 l_1)}{\kappa_1} \cdot z'(0) + \frac{\psi(\kappa_1 l_1)}{\kappa_1^2} \cdot z''(0) + \frac{\gamma(\kappa_1 l_1)}{\kappa_1^3} \cdot z'''(0); \\ z_i(l_i) = \rho(\kappa_1 l_i) \cdot z(0) + \frac{\varphi(\kappa_1 l_i)}{\kappa_1} \cdot z'(0) + \frac{\psi(\kappa_1 l_i)}{\kappa_1^2} \cdot z''(0) + \frac{\gamma(\kappa_1 l_i)}{\kappa_1^3} \cdot z'''(0) - \\ - \frac{c_1}{EJ\kappa_1^3} \sum_{j=1}^{i-1} z(l_j) \gamma(\kappa_1(l_i - l_{i-1})), \quad i = 2 - 24; \\ z_{24}(L) = 0; \\ z_{24}'(L) = 0. \end{array} \right. \quad (3.85)$$

Якщо правий кінець рейки вільний від накладки, то для визначення невідомих застосуємо граничні умови:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1'(0) = 0; \\ z_1'''(0) = z_1(0) \cdot \frac{c_{p.k.}}{EJ}; \\ z_1(l_1) = \rho(\kappa_1 l_1) \cdot z(0) + \frac{\varphi(\kappa_1 l_1)}{\kappa_1} \cdot z'(0) + \frac{\psi(\kappa_1 l_1)}{\kappa_1^2} \cdot z''(0) + \frac{\gamma(\kappa_1 l_1)}{\kappa_1^3} \cdot z'''(0); \\ z_i(l_i) = \rho(\kappa_1 l_i) \cdot z(0) + \frac{\varphi(\kappa_1 l_i)}{\kappa_1} \cdot z'(0) + \frac{\psi(\kappa_1 l_i)}{\kappa_1^2} \cdot z''(0) + \frac{\gamma(\kappa_1 l_i)}{\kappa_1^3} \cdot z'''(0) - \\ - \frac{c_p}{EJ\kappa_1^3} \sum_{j=1}^{i-1} z(l_j) \gamma(\kappa_1 (l_i - l_{i-1})), i = 2 \div 24; \\ z_{24}''(L) = 0; \\ z_{24}'''(L) = 0; \end{array} \right. \quad (3.86)$$

Якщо на обох кінцях рейки працюють накладки, то граничні умови для перебування невідомих будуть:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1'(0) = 0; \\ z_1'''(0) = z_1(0) \cdot \frac{c_{p.k.}}{EJ}; \\ z_1(l_1) = \rho(\kappa_1 l_1) \cdot z(0) + \frac{\varphi(\kappa_1 l_1)}{\kappa_1} \cdot z'(0) + \frac{\psi(\kappa_1 l_1)}{\kappa_1^2} \cdot z''(0) + \frac{\gamma(\kappa_1 l_1)}{\kappa_1^3} \cdot z'''(0); \\ z_i(l_i) = \rho(\kappa_1 l_{i-1}) \cdot z(0) + \frac{\varphi(\kappa_1 l_{i-1})}{\kappa_1} \cdot z'(0) + \frac{\psi(\kappa_1 l_{i-1})}{\kappa_1^2} \cdot z''(0) + \frac{\gamma(\kappa_1 l_{i-1})}{\kappa_1^3} \cdot z'''(0) - \\ - \frac{c_p}{EJ\kappa_1^3} \sum_{j=1}^{i-1} z(l_j) \gamma(\kappa_1 (l_i - l_{i-1})), i = 2 \div 24; \\ z_{24}(L) = 0; \\ z_{24}'(L) = 0. \end{array} \right. \quad (3.87)$$

Отримані системи рівняння (3.84) ÷ (3.87) використовуються в розділі 4 даної роботи при чисельному аналізі параметрів взаємодії вагона з рейковою колією в зоні стикової нерівності.